

Mérjük magasságot, hogyan Galilei!

A tavasz kezdetétől késő őszig lehetőségünk nyílik, hogy a szabadban végezzünk méréseket, megfigyeléseket diákjainkkal. Most egy egyszerű távolságmérési módszert szeretnék bemutatni, amelyet bármely osztálykiránduláson, nyári táborban, de akár egy fizika órán a teremből a szabadba kísértálva is elvégezhetünk. Nincs nagy eszközigény, és a mérések folyamatának megértéséhez csak a háromszögek hasonlóságának ismerete szükséges, így a kisebbek, illetve a matematikában kevésbé járatos tanulók is könnyen megértik. A mérések különlegessége, hogy *Galileo Galilei* leírásai alapján végezhetők el, így motivációt jelenhetnek a fizikatörténet iránt érdeklődő tanulók számára is.

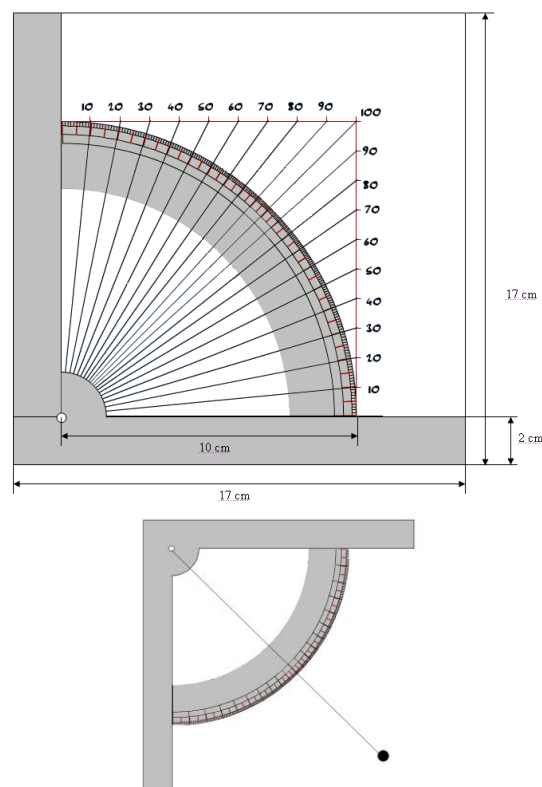
Galilei 1592-1610 között a padovai egyetemen tanított mechanikát, geometriát és csillagászatot. Ebben az időszakban elkészített egy szögmérőt. Az 1606-ban megjelent *Compasso geometrico e militare* (*Geometriai és katonai körzők*) című műve a forrása a következő magasságmérési módszereknek.



A Galilei által készített körző több skálát is tartalmazott. Mi egy egyszerűsített változatát készítjük el, csak egy skálával, ami távolságok mérésére szolgált.

Egy 17x17cm méretű kartonlaphból készítjük el az ábrán szürkére színezett eszközt. A skála felvételét szintén az ábra mutatja. A kis fehér kör egy 10x10 cm oldalhosszúságú négyzet csúcsa. A négyzet két oldalát 100-100 egyenlő részre osztjuk, majd az osztópontokat összekötjük a kör

középpontjával. Ezen összekötő vonalak jelölik ki a szürke negyed-köríven a skálánkat. A skála berajzolása után az eszközt kivágjuk, a kis kört átlukasztjuk és egy erősebb fonalon levő nehezéket kötünk hozzá. (Alkalmas pl. a horgászboltokban kapható ólomnehezék is.)



Az elkészítés után kezdődhetnek a mérések, akár kis csoportokban, akár egyénileg. Ha ugyanazt a távolságot több diák, vagy csoport is megméri, akkor lehetőség van hibaszámításra is. Eszközünk skálája egy arányskála, a távolságokat így tetszőleges egységekben meg tudjuk határozni. Használhatjuk valamely testrészünket is. Az ismert mérésekben többször használjuk a láb egységet. A lépéseink mérete nem mindig egyforma, így célszerűbb a talpukat használni a méréshez. A továbbiakban a talp méretét nevezem lábnak. Otthon, egy vonalzóval lemérve talpméretünket átszámíthatók a kapott magasságok méterre is, így a mértékegység-váltás gyakoroltatása is lehetővé válik. A következőkben néhány mérés menetét nézzük meg.

1. Határozzuk meg egy olyan tereptárgy, épület, stb. magasságát, amelyet teljesen meg tudunk közelíteni!

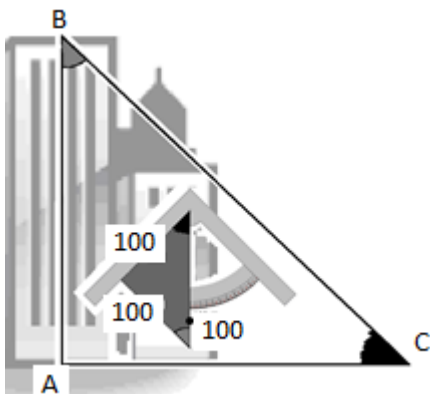
Feladat: Határozza meg egy, a lakótelepen levő emeletes ház magasságát!

Mérés: A ház tővétől indulva távolodjunk el x láb távolságra! Állítsuk a mérőeszközünket úgy, hogy az egyik szár egyenese mentén elnézve a ház tetejét lássuk!

Az eszközünk skálájáról leolvasott értékből megtudhatjuk, milyen magas a ház.

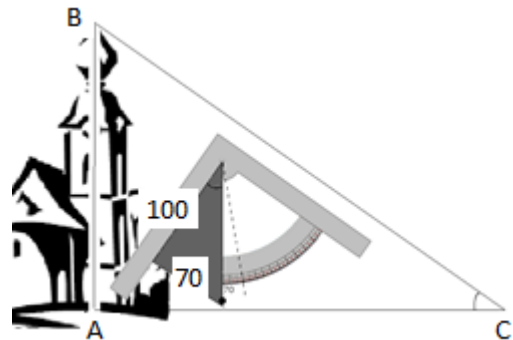
A magasságmérés során három eset lehetséges:

- Ha a fonal a skálán a 100-as értéket jelöli ki, akkor a skála elkészítéséből adódóan a sötétszürke háromszög egyenlőszárú, derékszögű. Az ABC háromszög ehhez hasonló, hiszen szögeik egyenlők. Így az ABC háromszög is egyenlőszárú, azaz a ház magassága $AB=AC=x$ láb.



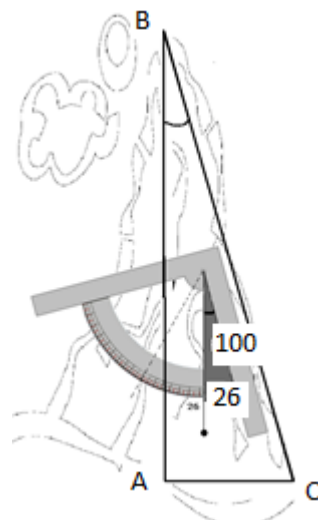
- Ha a fonal az eszköz szemüktől távolabbi felén helyezkedik el y értéknél (az ábrán példaként $y=70$), akkor a mérőn keletkező sötétszürke háromszögben a befogók aránya $y:100$ ($70:100$) a skála elkészítéséből adódóan. Ez a háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert a jelölt szögek merőleges szárú hegyesszögek, azaz egyenlők, mindkét háromszög derékszögű, így szögeik megegyeznek. A hasonlóságból következően $AB:AC=y:100$, amiből a ház magassága: $AB=y:100*AC$ (lépés). Ha

a ház tővétől 100 láb távolságot teszünk meg, akkor a skáláról leolvasott y közvetlenül a magasságot adja (láb egységben).



- Ha a fonal az eszköz szemünkhöz közelebbi felén helyezkedik el y értéknél (az ábrán példaként $y=26$), akkor a mérőn keletkező sötétszürke háromszögben a befogók aránya hasonlóan $y:100$ ($26:100$). Ez a háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert a jelölt szögek egyállású szögek, azaz egyenlők, mindkét háromszög derékszögű, így szögeik megegyeznek. Itt azonban a megfelelő szögek másként helyezkednek el. (Ez az eset akkor fordul elő, ha a ház magasságánál kevesebb lépést teszünk meg AC irányba.)

Itt a hasonlóságból következően $AB:AC=100:y$, amiből a ház magassága: $AB=100:y*AC$ (láb).

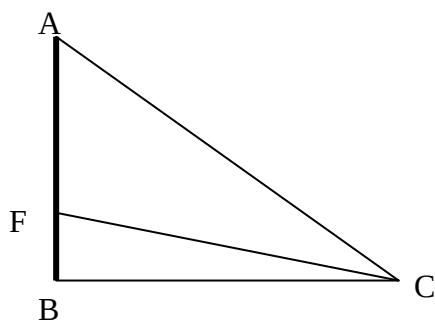


Fontos, hogy

- a további méréseknél is figyelembe vegyük, hogy a leolvasott érték melyik oldalon helyezkedik el.
- amennyiben a mérést szemmagasságban végezzük, úgy a kapott magasságot a szemmagasságunkkal növelni kell. (A szemmagasságunk kb. 11,25 láb, ezt a diákok is kiszámolhatják Leonardo da Vinci testarányokról írt munkája alapján.)

2. Keressünk egy olyan tereptárgyat a keresett magasság tövében, amelynek a nagyságát ismerjük! (Vagy található ugyanilyen más helyen is, ahol meg tudjuk az előző módszerrel mérni. Ilyen lehet pl. egy villanyoszlop vagy ajtó.)

Feladat: Határozzuk meg az AB magasságot, ha az FB magasság ismert!

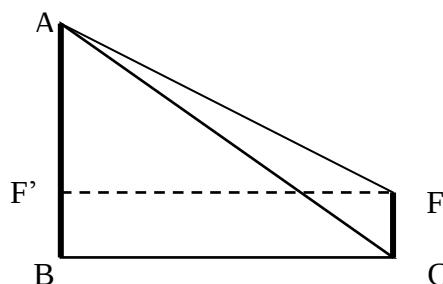


Mérés: A C-ből az A irányába nézve olvassuk le az értéket, ez legyen x! Majd ugyanonnan az F felé nézve kapott érték legyen y! A keresett AB magasság: $AB = \frac{x}{y} \cdot FB$.

Indoklás: A skála beosztásából adódóan az először leolvasott értékre teljesül, hogy $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{100}$. Az F felé nézve leolvasott értékből: $\frac{FB}{BC} = \frac{y}{100}$. Az előbbi két összefüggésből kapható a keresett magasságra vonatkozó fenti összefüggés.

3. Menjünk olyan távolságra a mérendő magasságtól, ahol van lehetőségünk függőlegesen nagyobb magasságba menni! (Ha nem vagyunk túl messze, akkor elég lehet egy székre történő felállás, vagy egymás nyakába ülve is próbálkozhatnak a diákok.)

Feladat: Határozzuk meg az AB magasságot, ha az FC távolság ismert!



Mérés: A C-ből az A irányába nézve olvassuk le az értéket, ez legyen x! Majd emelkedjünk az F-be és onnan is nézzünk az A felé, a kapott érték legyen y! A keresett AB magasság: $AB = \frac{x}{x-y} \cdot FC$.

Indoklás: A skála beosztásából adódóan az először leolvasott értékre teljesül, hogy $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{100}$. Az F-ből nézve leolvasott értékből: $\frac{AF'}{F'F} = \frac{y}{100}$. Az $\frac{AF'}{F'F} = \frac{AF'}{BC}$.

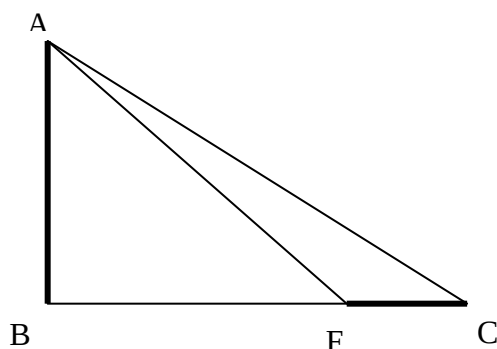
Ezek segítségével:

$$\frac{AB}{FC} = \frac{AB}{AB - AF'} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AB}{BC} - \frac{AF'}{BC}} = \frac{\frac{x}{100}}{\frac{x}{100} - \frac{y}{100}} = \frac{x}{x-y},$$

ami a keresett magasságra vonatkozó fenti összefüggés.

4. Vizsgáljuk a magasságot olyan távolságból, ahonnan még 100 lábnyira távolodni tudunk!

Feladat: Határozzuk meg az AB magasságot, ha FC=100 láb!



Mérés: Az F pontból az A irányába nézve olvassuk le az értéket, ez legyen x ! Távolodjunk 100 lábnyit a C-be és onnan is nézzünk az A felé, a kapott érték legyen y ! A keresett AB magasság: $AB = \frac{x \cdot y}{x - y}$.

Indoklás: A skála beosztásából adódóan az először leolvasott értékre teljesül, hogy $\frac{AB}{BF} = \frac{x}{100}$. A C felől nézve leolvasott

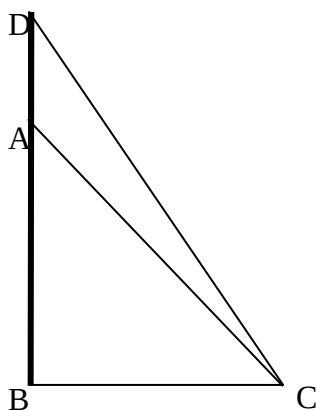
értékből: $\frac{AB}{BC} = \frac{y}{100}$. Az előbbi két összefüggés felhasználásával:

$$\frac{BF}{AB} + \frac{FC}{AB} = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{100}{x} + \frac{100}{AB} = \frac{100}{y}$$

$$\rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{x \cdot y}$$

amiből megkapható a keresett magasság.

5. Mérjük meg úgy a hegy, torony, stb. magasságát, hogy rajta vagyunk! Nézzünk ki egy tereptárgyat, fát, stb.; nézzük ezt a hegy/torony csúcsáról, majd emelkedjünk magasabbra függőlegesen és onnan is nézzük meg!



Feladat: Határozzuk meg az AB magasságát, ha AD ismert!

Mérés: Az A pontból a C felé nézve olvassuk le a mutatott értéket, ez legyen x ! Ezután emelkedjünk a D pontba, innen is nézzünk a C felé, a mutatott érték legyen y ! Az AB magasság: $AB = \frac{y}{x - y} \cdot AD$.

Indoklás: A skála elkészítéséből adódóan:

$$\frac{x}{100} = \frac{BC}{AB}, \frac{y}{100} = \frac{BC}{BD}$$

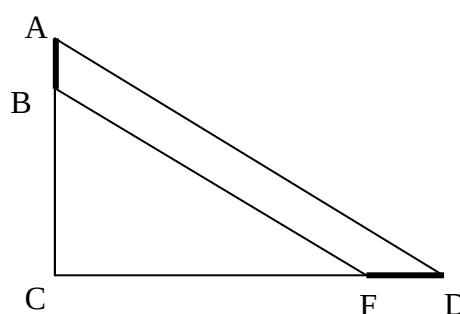
$$AD = BD - AB = \left(\frac{100}{y} - \frac{100}{x} \right) \cdot BC,$$

valamint

$$AB = \frac{100}{x} \cdot BC = \frac{100}{x} \cdot \frac{AD}{\left(\frac{100}{y} - \frac{100}{x} \right)} = \frac{y}{x - y} \cdot AD$$

6. Mérjük meg egy magaslaton levő tereptárgy nagyságát! Határozzuk meg, milyen magas egy dombon levő vár várfala; milyen nagyságú a torony tetején levő zászló, vagy egy hegyen álló fa!

Feladat: Határozzuk meg az AB nagyságát!



Mérés: A D pontban nézzünk eszközünkkel az A pont felé, legyen a kapott érték x ! Ezután közelítsük a C ponthoz, - számolva, hány láb távolságot teszünk meg - mindaddig, amíg a műszerünkkel a B felé nézve ugyanazt az

értéket látjuk (x-et), mint az előbb! Ekkor az AB magassága: $AB = \frac{x}{100} \cdot FD$.

Indoklás: A skála felvételéből következik, hogy $\frac{AC}{CD} = \frac{x}{100} = \frac{BC}{CF}$. Így

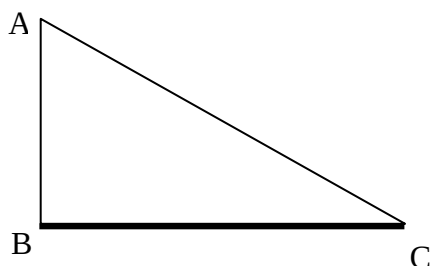
$$AB = AC - BC = \frac{x}{100} \cdot CD - \frac{x}{100} \cdot CF = \frac{x}{100} \cdot FD$$

Az FD hosszát tudjuk, így az AB kiszámítható.

Vízszintes irányú távolságmérés

7. **Határozzuk meg, milyen messze van egy folyó, patak, egyéb tereptárgy a hegytől, ha ismerjük a hegy magasságát!**

A) Feladat: Határozzuk meg a BC távolságot, ha az AB ismert!

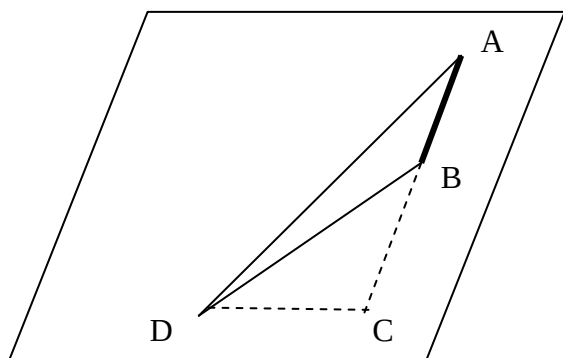


Mérés: A hegy tetejéről irányítsuk eszközünket a tereptárgy felé, olvassuk le a mutatott értéket, ez legyen: x! Ekkor

$$BC = \frac{x}{100} \cdot AB.$$

Indoklás: A skála felvételéből közvetlenül adódik az összefüggés.

B) Feladat: Határozzuk meg a vízszintes AB távolságot!



Mérés: Lépjük 100 lábat az AB egyenesében, így a C pontba érünk, majd ismét lépjünk 100 lábat erre merőlegesen, ekkor kapjuk a D pontot. Mérőnk egyik szárát a CD egyenesében elhelyezve húzzuk ki a fonalat az A irányába, majd olvassuk le a mutatott értéket, legyen ez x!

$$\text{Az AB távolság: } AB = \frac{10000}{x} - 100(\text{láb}).$$

Indoklás: A skála felvételéből adódóan $\frac{x}{100} = \frac{DC}{AC} \rightarrow AC = \frac{100}{x} \cdot DC = \frac{10000}{x}$, valamint $AB = AC - BC = AC - 100$. A két összefüggésből adódik a fenti képlet.

Irodalom

1. Galileo Galilei: Operations of the geometric and military compass, 1606. Az angol fordítást Stillman Drake készítette, Firenze 1977. (A 3.-ban megjelölt web-helyen is megtalálható)
2. A firenzei Galilei Múzeum honlapja: <http://www.museogalileo.it/>
3. A múzeum szögmérővel kapcsolatos interaktív anyaga: <http://brunelleschi.imss.fi.it/esplora/compasso/index.html>